ordnung 20 Proz.). An dieser zur Zeit unüberwindbaren Schwierigkeit kranken sämtliche zur Bestätigung des $\lambda^{-4}$-Gesetzes unternommenen Messungen[14]).

L. Foitzik[15]) hat in vereinzelten Fällen auch Verhältnisse $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} < 1$ (Größenordnung 0,95) gefunden. In dem Sichtweitenbereich zwischen 100 und 400 m lassen sich, wie die Rechnung zeigt, die Wellenlängenexponenten $x$ nicht genauer als auf rund 40—50 Proz. ermitteln. Angesichts dieser Ungenauigkeit scheint es gewagt, aus den Meßergebnissen von Foitzik die Folgerung zu ziehen, daß der Wellenlängenexponent die Null durchlaufen und auch negative Werte annehmen kann, wodurch erst die vorgenommene Klassifikation der Nebel in „normale" und „anomale" ihre Berechtigung erhalten würde.

## § 6. Allgemeingültigkeit der Bouguerschen Luftlichtformel für das trübe Medium Luft

Nach den vorliegenden Messungen ist die Bouguersche Luftlichtformel auch für natürlichen Nebel bis herab zu Sichtweiten von rund 200 m streng gültig. Unter Heranziehung der im Havelland, Schwarzwald und den Hohen Tauern durchgeführten Sichtmessungen kann nunmehr die Richtigkeit der Bouguerschen Luftlichtformel in dem Sichtweitenbereich von 0,2 bis 100 km als nachgewiesen gelten. Zu prüfen bleibt noch die Unterordnung der seltenen Fernsichten[16]) unter das Bouguersche Gesetz. Der Nachweis der Gültigkeit der Bouguerschen Luftlichtformel im Bereich der Sichtweiten größer als 100 km läßt sich indirekt durch Heranziehung der Messungen der Himmelshelligkeit durch G. I. Pokrowski[17]) erbringen. Pokrowski mißt die milchige Trübung $h_s$ des blauen Himmelsgrundes in verschiedenen Höhen $\varphi$ über dem Horizont. Bedeutet $H_0$ die Dicke der Lufthülle, so berechnen sich die wirksamen Längen der mit lichtzerstreuenden Teilchen angefüllten Sehstrahlpyramiden zu $H_0/\sin\varphi$ und die Zunahme der milchigen Trübung des blauen Himmelsgrundes mit Annäherung an den Horizont zu

$$h_s = i_g\left(1 - e^{-\frac{H_0}{\sin\varphi}}\right). \qquad (18)$$

Pokrowski hat durch Beschränkung der Messungen auf den Bereich $10° < \varphi < 75°$ die Gültigkeit der Formel (18) nachweisen können.

Die Gesamtheit der vorliegenden Untersuchungen berechtigt zu dem Schluß, daß der Bouguerschen Luftlichtformel in der Anwendung auf die atmosphärischen Trübungen Allgemeingültigkeit zukommt.

14) J. Dufay, Journ. Phys. Radium (VIII) 1, 251, 1940.
15) L. Foitzik, Wiss. Abh. Reichsamt Wetterdienst 4, Nr. 5, 1938.
16) F. Löhle, Sichtbeobachtungen, l. c.
17) G. I. Pokrowski, Zeitschr. f. Phys. 34, 496, 1925.

(Eingegangen 7. Mai 1944)

---

# Ein Hilfsmittel zur Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes

Von M. Czerny

Zusammenfassung

Es wird ein Rechenschieber beschrieben, auf dem die Intensität einer schwarzen Strahlung in einem beliebigen, endlichen Wellenlängenbereich abgelesen werden kann.

Beim Planckschen Gesetz der spektralen Intensitätsverteilung der schwarzen Strahlung besteht die Schwierigkeit, daß man es nicht in geschlossener Form über beliebige Wellenlängenbereiche integrieren kann. Nur von $\lambda = 0$ bis $\infty$ läßt es sich integrieren und ergibt dann das Stefan-Boltzmannsche Gesetz. Diese Schwierigkeit hat man durch passend angelegte Tabellen und Nomogramme zu beheben versucht. Im folgenden ist ein zu diesem Zweck konstruierter Rechenschieber beschrieben und abgebildet. Er beruht auf einer Ausnutzung des Wienschen Verschiebungsgesetzes in seiner allgemeinen Form.

Gewöhnlich schreibt man das Strahlungsgesetz in der Form

$$E = 2\,c_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^{-5}\,d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}.$$

$EF\Delta\Omega$ gibt an, welche Energie pro Sekunde von der Fläche $F$ eines schwarzen Strahlers senkrecht zur Fläche in den räumlichen Winkel $\Delta\Omega$

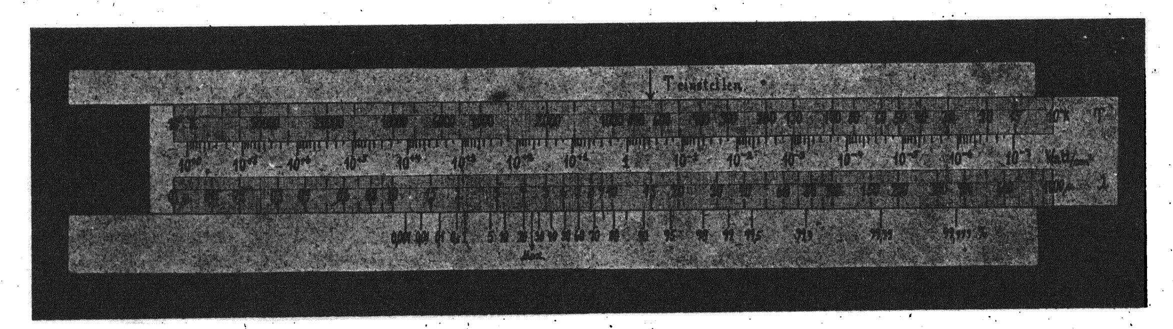


Fig. 1. Die beiden oberen Skalen geben den Zusammenhang zwischen absoluter Temperatur und Gesamtstrahlung. An den beiden unteren Skalen kann man ablesen, wie sich die Gesamtstrahlung auf das Spektrum bei einer bestimmten Temperatur verteilt und zwar besagen die Prozentzahlen der untersten Skala, welcher Bruchteil der Gesamtstrahlung zu einem Wellenlängen-Bereich von $\lambda = 0$ bis zu einem auf der dritten Skala abgelesenen Wellenlängen-Wert gehört.

gestrahlt wird. Die Integration über den gesamten Wellenlängenbereich ergibt

$$Q = 2\, c_1 \frac{\pi^5}{15\, c_2^4} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \text{ [1]}.$$

Für den vorliegenden Zweck empfiehlt es sich, in dem Strahlungsgesetz eine neue Variable $z = \frac{c_2}{\lambda T}$ und die Konstante $\sigma$ einzuführen. Man erhält dann

$$E = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \int_{z_1}^{z_2} \frac{15}{\pi^4} \frac{z^3\, dz}{e^z - 1}.$$

Die Faktoren vor dem Integral geben jetzt die Intensität der Gesamtstrahlung, das Integral selbst die Verteilung der Gesamtstrahlung auf das Spektrum. Von 0 bis $\infty$ summiert gibt das Integral 1. Durch numerische Rechnung wurden die Werte der Verteilungsfunktion

$$W(z^*) = \int_{z^*}^{\infty} \frac{15}{\pi^4} \frac{z^3\, dz}{e^z - 1}$$

bestimmt und tabelliert. In $\lambda$ ausgedrückt gibt die Verteilungsfunktion an, welcher Bruchteil der Gesamtstrahlung im Intervall von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \lambda^* \left[ z^* = \frac{c_2}{\lambda^* T} \right]$ liegt, wenn man eine bestimmte Temperatur ins Auge faßt. Für das Folgende ist es wesentlich, daß die Werte der Verteilungsfunktionen nur von dem Produkt $\lambda \cdot T$ abhängen.

1) Der Faktor $1/\pi$ in dem letzten Ausdruck fällt weg, wenn man die Ausstrahlung in den halben Raum unter Berücksichtigung des Cosinusgesetzes berechnet.

Die Form des Rechenschiebers ist in der Fig. 1 dargestellt. Man erkennt auf einem Läuferteil oben eine logarithmische Temperaturskala, unten eine gegenläufige logarithmische Wellenlängenskala. Durch diese Gegenläufigkeit wird erreicht, daß, wenn man unterhalb und oberhalb des Läufers je eine Marke anbringt, das Produkt der beiden gekennzeichneten Werte von $\lambda$ und $T$ einen festen Wert hat, unabhängig von der Läuferstellung. Oberhalb der Temperaturskala ist eine Marke zum Einstellen von $T$ angebracht, unterhalb der Wellenlängenskala könnte eine Skala aufgezeichnet werden, die die Werte des Produktes $\lambda \cdot T$ angibt. Statt dessen sind gleich die Werte der Verteilungsfunktion angegeben, die zu dem betreffenden Produktwert von $\lambda \cdot T$ gehören. Die Werte der Verteilungsfunktion sind auf dem Rechenschieber in Prozenten angegeben.

In der untersten Skala ist die Stelle maximaler Intensität der Strahlung eingetragen, wenn man konstante Intervalle $\Delta\lambda$ in Betracht zieht.

Auf dem Läuferteil befindet sich unter der Temperaturskala noch eine logarithmische Skala, die die zu $T$ gehörigen Werte von $\frac{\sigma}{\pi} T^4$, also die Intensität der Gesamtstrahlung abzulesen gestattet.

Ich danke Herrn stud. rer. nat. Kurt Schäfer für die Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnung.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut der Universität, 1944.

*(Eingegangen 4. Juli 1944)*

## German Original

M. Czerny, Ein Hilfsmittel zur Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes, *Physikalische Zeitschrift* **45**, Nr. 9/12, 205–206 (1944).

## Ein Hilfsmittel zur Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes

Von M. Czerny

Zusammenfassung

Es wird ein Rechenschieber beschrieben, auf dem die Intensität einer schwarzen Strahlung in einem beliebigen, endlichen Wellenlängenbereich abgelesen werden kann.

Beim Planckschen Gesetz der spektralen Intensitätsverteilung der schwarzen Strahlung besteht die Schwierigkeit, daß man es nicht in geschlossener Form über beliebige Wellenlängenbereiche integrieren kann. Nur von $\lambda = 0$ bis $\infty$ läßt es sich integrieren und ergibt dann das Stefan–Boltzmannsche Gesetz Diese Schwierigkeit hat man durch passend angelegte Tabellen und Nomogramme zu beheben versucht. Im folgenden ist ein zu diesem Zweck konstruierter Rechenschieber beschrieben und abgebildat. Er beruht auf einer Ausnutzung des Wienschen Verschiebungsgesetzes in seiner allgemeinen Form.

Gewöhnlich schreibt man das Strahlungsgesetz in der Form

$$E = 2c_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}.$$

$EF\Delta\Omega$ gibt an, welche Energie pro Sekunde von der Fläche $F$ eines schwarzen Strahlers senkrecht zur Fläche in den räumlichen Winkel $\Delta\Omega$ gestrahlt wird.

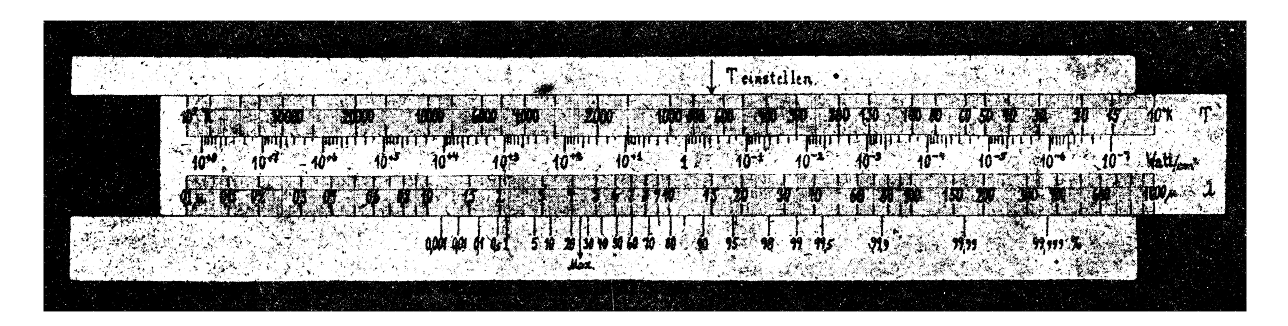



Figure 1: Die beiden oberen Skalen geben den Zusammenhang zwischen absoluter Temperatur und Gesamtstrahlung. An den beiden unteren Skala kann man ablesen, wie sich die Gesamtstrahlung auf das Spektrum bei einer bestimmten Temperatur verteilt und zwar besagen die Prozentzahlen der untersten Skala, welcher Bruchteil der Gesamtstrahlung zu einem Wellenlängen-Bereich von $\lambda = 0$ bis zu einem auf der dritten Skala abgelesenen Wellenlägen-Wert gehört.

Die Inetration über den gesamten Wellenlängenbereich ergibt[1]

$$Q = 2c_1 \frac{\pi^5}{15c_2^4} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

Für den vorliegenden Zweck empfiehlt es sich, in dem Strahlungsgesetz eine neue Variable $z = \frac{c_2}{\lambda T}$ und die Konstante $\sigma$ einzuführen. Man erhält dann

$$E = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \int_{z_1}^{z_2} \frac{15}{\pi^4} \frac{z^3 dz}{e^z - 1}.$$

Die Faktoren vor dem Integral geben jetzt die Intensität der Gesamtstrahlung, das Integral selbst die Verteilung der Gesamtstrahlung auf das Spektrum. Von 0 bis $\infty$ summiert gibt das Integral 1. Durch numerische Rechnung wurden die Werte der Verteilungsfunktion

$$W(z^*) = \int_{z^*}^{\infty} \frac{15}{\pi^4} \frac{z^3 dz}{e^z - 1}$$

bestimmt und tabelliert. In $\lambda$ ausgedrückt gibt die Verteilungsfunktion an, welcher Bruchteil der Gesamtstrahlung im Intervall von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \lambda^* \left[z^* = \frac{c_2}{\lambda^* T}\right]$ liegt, wenn man eine bestimmte Temperatur ins Auge faßt. Für das Folgende ist es wesentlich, daß die Werte der Verteilungsfunktionen nur von dem Product $\lambda \cdot T$ abhängen.

Die Form des Rechenschiebers ist in der Fig. 1 dargestellt. Man erkennt auf einem Läuferteil oben eine logarithmische Temperaturskala, unten eine gegenläufige logarithmische Wellenlängenskala. Durch diese Gegenläufigkeit wird erreicht, daß, wenn man unterhalb und oberhalb des Läufers je eine Marke anbringt, das Produkt der beiden gkennzeichneten Werte von $\lambda$ und $T$ einen festen Wert hat, unabhängig von der Läuferstellung. Oberhalb der Temperaturskala ist eine Marke zum Einstellen von $T$ angebracht, unterhalb der Wellenlängenskala könnte eine Skala aufgezeichnet werden, die die Werte des Produktes $\lambda \cdot T$ angibt. Statt dessen sind gleich die Werte der Verteilungsfunktion angegeben, die zu dem betreffenden Produktwert von $\lambda \cdot T$ gehören. Die Werte der Verteilungsfunktion sind auf dem Rechenschieber in Prozenten angegeben.

In der untersten Skala ist die Stelle maximaler Intensität der Strahlung eingetragen, wenn man konstante Intervalle $\Delta\lambda$ in Betracht zieht.

Auf dem Läuferteil befindet sich unter der Temperaturskala noch eine logarithmische Skala, die die zu $T$ gehörigen Werte $\frac{\sigma}{\pi} T^4$, also die Intensität der Gesamtstrahlung abzulesen gestattet.

Ich danke Herrn stud. rer. nat. Kurt Schäfer für die Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnung.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut der Universität, 1944.

(*Eingegangen 4. Juli 1944*)

[1] Der Faktor $1/\pi$ in dem letzten Ausdruck fällt weg, wenn man die Ausstrahlung in den halben Raum unter Berücksichtigung des Cosinusgesetzes berechnet.

## English Translation

M. Czerny, An aid for the use in the integration of Planck's radiation law, *Physikalische Zeitschrift* **45**, No. 9/12, 205–206 (1944).

## An aid for the use in the integration of Planck's radiation law

By M. Czerny

Abstract

A slide rule is described on which the intensity of blackbody radiation in any finite spectral range can be read.

The difficulty with Planck's law of the spectral intensity distribution of blackbody radiation is that it cannot be integrated in closed form over any arbitrary spectral ranges. It can only be integrated from $\lambda = 0$ to $\infty$ and then gives the Stefan–Boltzmann law. Attempts have been made to overcome this difficulty by suitably arranged tables and nomograms. A slide rule designed for this purpose is described and illustrated below. It is based on exploitation of Wien's displacement law in its general form.

The radiation law is usually expressed in the form

$$E = 2c_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^{-5} d\lambda}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}.$$

$EF\Delta\Omega$ expresses the energy per second which is radiated from the face $F$ of a blackbody radiator perpendicular to the face into the spatial angle $\Delta\Omega$.

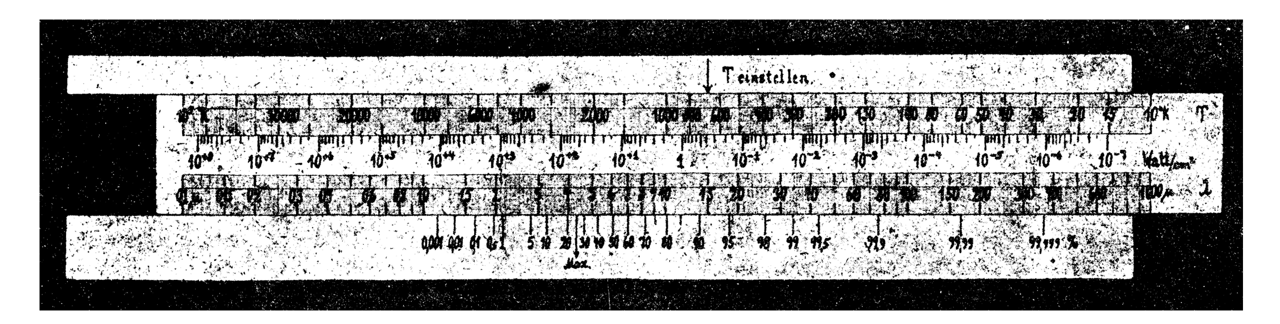



Figure 1: The two top scales give the correlation between absolute temperature and total radiation. On the two lower bottom it is possible to read how the total radiation is distributed to the spectrum at a specific temperature, and the percentages in the bottom scale indicate what fraction of the total radiation belongs to a spectral range from $\lambda = 0$ to a spectral action read on the third scale.

The integration over the full spectral range gives[1]

$$Q = 2c_1 \frac{\pi^5}{15c_2^4} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

For this purpose it is recommended that a new variable $z = \frac{c_2}{\lambda T}$ and the constant $\sigma$ be introduced into the radiation law. This then gives

$$E = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \int_{z_1}^{z_2} \frac{15}{\pi^4} \frac{z^3 dz}{e^z - 1}.$$

The factors before the integral then give the intensity of the total radiation and the integral itself gives the distribution of the total radiation on the spectrum. When totalled from 0 to $\infty$, this gives the integral 1. By numerical calculation the values of the distribution function

$$W(z^*) = \int_{z^*}^{\infty} \frac{15}{\pi^4} \frac{z^3 dz}{e^z - 1}$$

were determined and tabulated. Expressed as $\lambda$, the distribution function expresses the fraction of the total radiation which lies in the interval from $\lambda = 0$ to $\lambda = \lambda^* \left[z^* = \frac{c_2}{\lambda^* T}\right]$, when a specific temperature is envisaged. For the following, it is essential that the values of the distribution functions are only dependent on the product $\lambda \cdot T$.

The form of the slide rule is shown in Fig. 1. On a slide section, a logarithmic temperature scale can be seen at the top and a reverse logarithmic spectral scale at the bottom. This reversal means that if marks are placed one below and one above the slide, the product of the two values of $\lambda$ and $T$ identified has a fixed value irrespective of the slide position. Above the temperature scale there is a mark for setting the $T$ and below the spectral scale a scale giving the values for the product $\lambda \cdot T$ could be indicated. Instead of this, the values of the distribution function which are associated with the relevant product of $\lambda \cdot T$ are given directly. The values for the distribution function are expressed on the slide rule as percentages.

In the bottom scale, the position of maximum intensity of the radiation is recorded when the constant interval $\Delta\lambda$ is taken into account.

There is another logarithmic scale on the slide section, below the temperature scale, which enables the $\frac{\sigma}{\pi} T^4$ values associated with $T$, i.e. the intensity of the total radiation, to be read.

I would like to thank Mr Kurt Schäfer, stud. rer. nat. (studiosus rerum naturalium), for his help with the numerical calculations.

Frankfurt am Main, Physics Institute of the University, 1944.

(*Received 4 July 1944*)

[1]The factor $1/\pi$ in the last arithmetic expression ceases to apply if the radiation emission to half the space is calculated with allowance for the law of cosines.